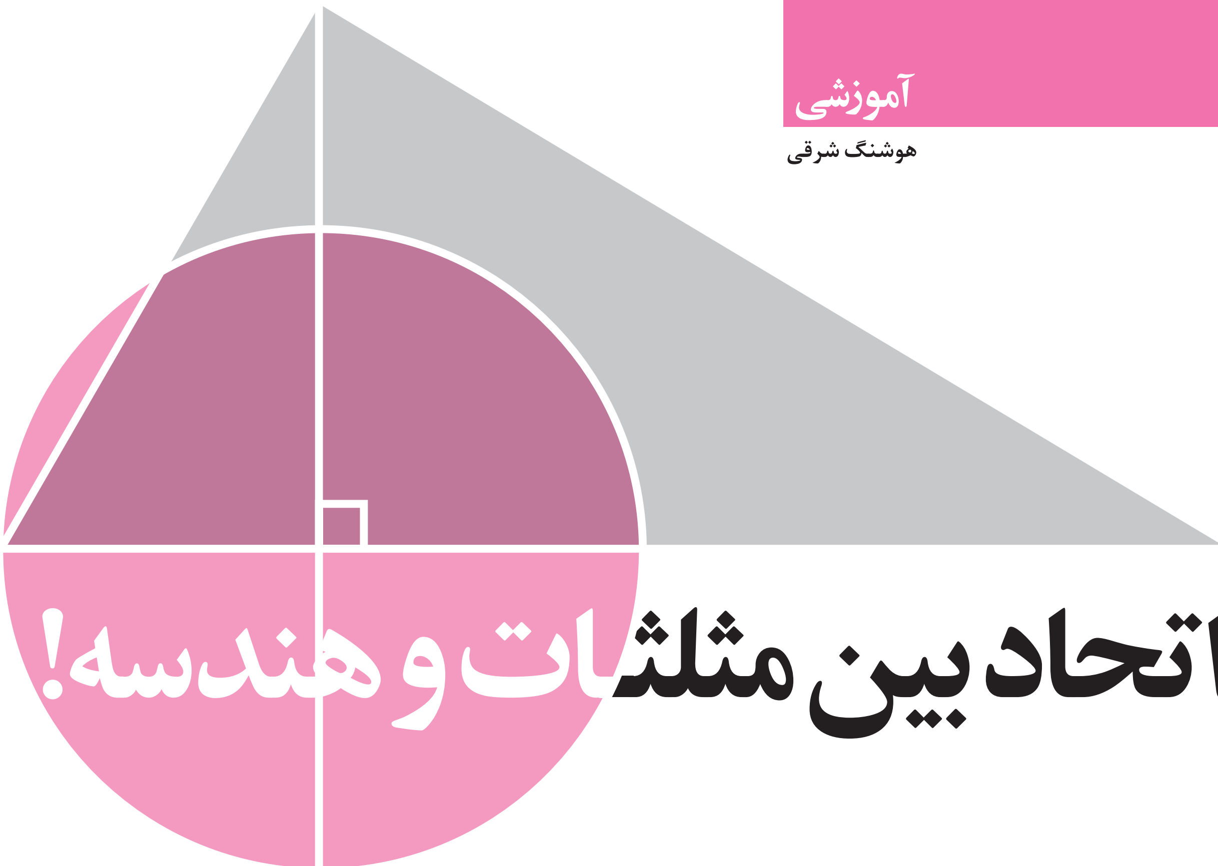
هوشنگ شرقی



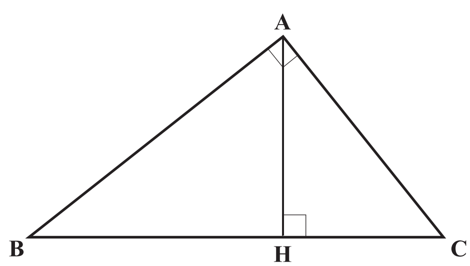
اتحاد بین مثلثات و هندسه!

اشاره

با مفهوم اتحاد و نیز اتحادهای مثلثاتی آشنایی دارید. اینک می‌خواهیم برخی از اتحادهای مثلثاتی پایه‌ای را به روش هندسی برایتان اثبات کنیم. در ضمن این بحث با دو نسبت مثلثاتی جدید که البته به لحاظ تاریخی چندان هم جدید نیستند، آشنا می‌شوید.

با هندسه شروع می‌کنیم!

در کتاب هندسهٔ دهم با روابط طولی زیر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ آشنا شده‌اید:



(۱) $AH^2 = BH.CH$

(۲) $AC^2 = BC.CH$

(۳) $AB^2 = BC.BH$

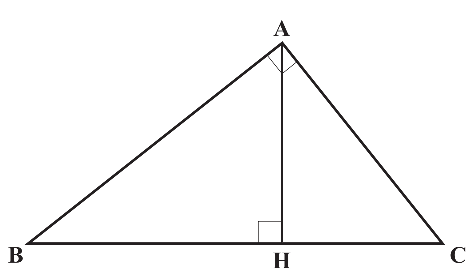
(۴) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

(۵) $AB.AC = AH.BC$

یک رابطهٔ طولی معروف هم به‌صورت (۶) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ وجود دارد که به سادگی به کمک روابط ۱، ۲ و ۳ اثبات می‌شود.

(خودتان انجام دهید!) قبل از ورود به بخش بعدی، این نکتهٔ جالب را یادآوری می‌کنیم که همهٔ این روابط را فقط به کمک «قضیهٔ **فیثاغورس**» $(AB^2 + AC^2 = BC^2)$ می‌توانیم اثبات کنیم. یعنی اگر بتوانیم قضیهٔ فیثاغورس را به‌طور مستقل و بدون استفاده از پنج رابطهٔ دیگر، اثبات کنیم (که این کار مثلاً با استفاده از مساحت‌ها امکان‌پذیر است)، می‌توانیم پنج رابطهٔ دیگر را به کمک قضیهٔ فیثاغورس نیز اثبات کنیم.

فرض کنید درستی قضیهٔ فیثاغورس را می‌دانیم. پس در مثلث‌های AHC و AHB داریم:



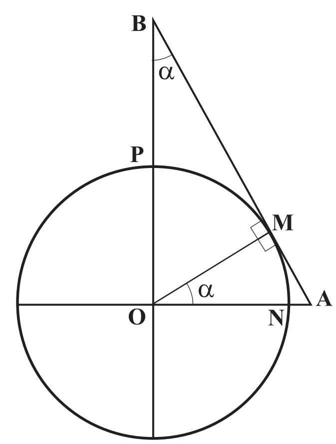
$AH^2 + BH^2 = AB^2 \quad (*)$

$AH^2 + CH^2 = AC^2 \quad (**)$

حال دو طرف این دو تساوی را با هم جمع کنید و به‌جای AB^2+AC^2، BC^2 را قرار دهید. آن‌گاه به جای BC، $BH+CH$ را قرار دهید و با کمی محاسبهٔ جبری، رابطهٔ $AH^2 = BH.CH$ را نتیجه بگیرید. حالا با جایگزینی این تساوی در هر یک از تساوی‌های (*) و (**) روابط $AB^2 = BC.BH$ و $AC^2 = BC.CH$ را اثبات کنید و از ضرب طرفین این دو رابطه نیز تساوی $BC.AH = AB.AC$ را نتیجه بگیرید.

ورود به مثلثات!

اکنون وارد بحث اصلی خودمان می‌شویم. دایرهٔ مثلثاتی به مرکز O و به شعاع r=۱ را در نظر بگیرید. اگر M انتهای کمان $\widehat{NM}=\alpha$ باشد، در نقطهٔ M مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا امتدادهای شعاع‌های ON و OP (محورهای کسینوس‌ها و سینوس‌ها) را در نقطه‌های A و B قطع کند.



می‌دانیم که شعاع OM بر مماس AB عمود است. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OMA و OMB داریم:

$$\Delta OMA : \hat{O}=\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{OA}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{OM}{MA} = \frac{1}{MA} \Rightarrow MA = \frac{1}{\cot\alpha} = \tan\alpha$$

$$\Delta OMB : \hat{B}=\alpha \ (\text{چرا؟}) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{OM}{OB} = \frac{1}{OB}$$

$$\Rightarrow OB = \frac{1}{\sin\alpha}, \tan\alpha = \frac{OM}{MB} = \frac{1}{MB}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha$$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB با رأس قائمهٔ O، داریم: ارتفاع وارد بر وتر، یعنی OM=۱، MA=tanα، MB=cotα، $OA = \frac{1}{\cos\alpha}$ و $OB = \frac{1}{\sin\alpha}$.

حال روابط طولی ۱ تا ۶ را در این مثلث بنویسیم:

$$(1)\ OM^2 = MA.MB \Rightarrow 1 = \tan\alpha.\cot\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha.\cot\alpha = 1}$$

$$(2)\ OA^2 = MA.AB \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)$$

$$= \tan^2\alpha + \tan\alpha.\cot\alpha = \tan^2\alpha + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$(3)\ OB^2 = MB.AB \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = \cot\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)$$

$$= \cot\alpha.\tan\alpha + \cot^2\alpha = 1+\cot^2\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

$$(4)\ OM.AB = OA.OB$$

$$\Rightarrow 1\times(\tan\alpha+\cot\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}.\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha+\cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha.\cos\alpha}}$$

$$(5)\ OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{\sin\alpha})^2 + (\frac{1}{\cot\alpha})^2 = (\tan\alpha+\cot\alpha)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = (\tan\alpha+\cot\alpha)^2$$

سؤال: چگونه می‌توانید این رابطه را از رابطهٔ (۴) نتیجه بگیرید؟

$$(6)\ \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OM^2} \Rightarrow \frac{1}{(\frac{1}{\sin\alpha})^2} + \frac{1}{(\frac{1}{\cos\alpha})^2} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

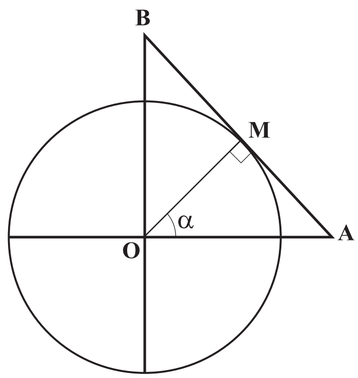
به این ترتیب توانستیم روابط مثلثاتی معروف را به‌صورت هندسی اثبات کنیم و ظاهراً سخن ما به پایان رسیده است. اما اگر مطلب را در اینجا به پایان بریم، لااقل این است که به واقع به تاریخ پربار ریاضی کشورمان کم‌لطفی و ناسپاسی کرده‌ایم! حتماً می‌پرسید چرا؟

ریاضی‌دانان نام‌آور ایرانی در سده‌های نخستینِ دورهٔ ریاضیات

ابوالوفا بوزجانی

ایرانی ـ اسلامی کارهای بزرگی در زمینهٔ مثلثات انجام داده بودند و در آثار بزرگانی همچون **جمشید کاشانی**، **خواجه نصیرالدین طوسی** و **حکیم عمر خیام** کارهایی در این زمینه دیده می‌شوند. ریاضی‌دانان ایرانی نسبت‌های مثلثاتی را خطوط مثلثاتی می‌نامیدند. (فکر می‌کنید چرا؟) آن‌ها سینوس زاویه را جِیب، کسینوس آن را جیب تمام، تانژانت را ظلّ و کتانژانت را ظلّ تمام نامیدند. اما در میان ریاضی‌دانان ایرانی، **ابوالوفا بوزجانی** (۳۲۸–۳۸۸ هـ.ق) ریاضی‌دان بنام ایرانی قرن چهارم هجری، زادهٔ بوزجان (بوژگان) از توابع تربت جام در استان خراسان رضوی، جایگاهی بس رفیع در گسترش دانش مثلثات دارد. او به غیر از کارهایی که در زمینهٔ ریاضیات محاسباتی و مساحی (اندازه‌گیری مساحت زمین‌ها) و هندسهٔ اقلیدسی و نجوم انجام داده بود، به‌طور خاص در زمینهٔ مثلثات کارهای زیادی انجام داد و اثبات بسیاری از روابط مثلثاتی را در ابتدا به او نسبت داده‌اند.

بوزجانی نخستین کسی است که به عکس نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس به‌همین صورتی که دیدیم، توجه کرد و $\frac{1}{\sin\alpha}$ و $\frac{1}{\cos\alpha}$ را به‌صورت خطوط مثلثاتی نشان داد. چنان که دیدیم، برای نمایش این خطوط کافی است در نقطهٔ انتهایی کمان α، مماسی بر دایرهٔ مثلثاتی رسم کنیم، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد این مماس و محور کسینوس‌ها تا مبدأ محور (یعنی نقطهٔ O مرکز دایره)، $\frac{1}{\cos\alpha}$ و فاصلهٔ نقطهٔ برخورد مماس و محور سینوس‌ها تا مبدأ محور، $\frac{1}{\sin\alpha}$ است. ابوالوفا بوزجانی، عکس کسینوس را قطر ظلّ و عکس سینوس را قطر ظلّ تمام نامید. امروزه عکس کسینوس را سکانت و عکس سینوس را کسکانت می‌نامند. یعنی در شکل زیر داریم:



$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = OA$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = OB$$

همچنین داریم: $\tan\alpha = AM$ و $\cot\alpha = BM$

تمرین:

۱. با توجه به شکل بالا، آیا می‌توانید روشی دیگر برای یافتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰° و ۴۵° ارائه دهید؟

۲. برای زاویهٔ α که انتهای آن در نواحی دوم، سوم و چهارم باشد، $\sec\alpha$ و $\csc\alpha$ را نمایش داده و علامت آن را مشخص کنید. آیا با توجه به شکل‌ها می‌توانید حدود قابل قبول برای $\sec\alpha$ و $\csc\alpha$ را مشخص کنید؟ این حدود چه رابطه‌ای با حدود $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ دارد؟

؟ پرسش‌های بیکارجو!

۵

درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۷ واحد، نقطه‌ای که از دو رأس مثلث، به فاصله‌های ۳ و ۵ واحد است، از رأس سوم به چه فاصله‌ای است؟

الف) $۲\sqrt{۵}$

ب) $۳\sqrt{۲}$

ج) $\sqrt{۱۹}$

د) $\sqrt{۲۱}$

هـ) ۵

در یک روستای معین، همهٔ مردان فقط در روزهای خاصی از سال که به دلایلی به آن روزها علاقه دارند، کلاه‌های رنگی و یک شکل به‌سر می‌گذارند و هیچ دو روستایی در همهٔ روزها از این نظر رفتار مشابهی ندارند. یعنی برای هر دو روستایی معین، لااقل یک روز وجود دارد که یکی از آن‌ها کلاه برسر دارد و دیگری ندارد. برای هر دو روستایی X،Y و Y دنباله روی X نامیده می‌شود، اگر در تمام روزهایی که X کلاه دارد، Y هم کلاه بگذارد (و البته ممکن است در روزهای دیگری هم کلاه داشته باشد). همچنین برای هر سه روستایی X، Y و Z، Z دنباله روی X و Y است، اگر Z در همهٔ روزهایی که X و Y هر دو کلاه دارند، کلاه بر سر بگذارد. در مورد پنج روستایی به نام‌های **اکبر**، **جواد**، **پرویز**، **خسرو** و **سعید**، حقایق زیر معلوم شده است:

ایستگاه دوم

۱. جواد و پرویز در عادت‌های کلاه‌گذاری‌شان، برعکس هم عمل می‌کنند، در هر روز معین، یکی از آن‌ها کلاه می‌گذارد و دیگری نمی‌گذارد.

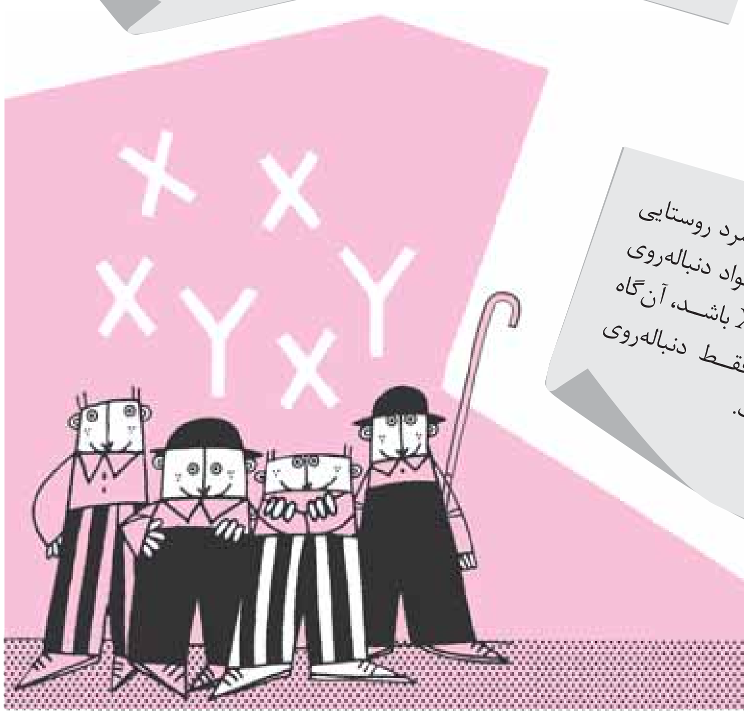
۲. خسرو و سعید هم دقیقاً به همان ترتیب، متضاد هم عمل می‌کنند.

۳. سعید فقط و فقط در روزهایی که اکبر و پرویز هر دو کلاه دارند، کلاه بر سر می‌گذارد.

۴. این روستا فقط یک چوپان دارد و جواد دنباله‌روی چوپان و اکبر است.

۵. برای هر مرد روستایی X، اگر جواد دنباله‌روی اکبر و X باشد، آن‌گاه چوپان فقط دنباله‌روی X است.

۶. اکبر فقط کلاه مشکی می‌گذارد، جواد فقط کلاه سفید می‌گذارد، پرویز فقط کلاه خاکستری می‌گذارد، خسرو فقط کلاه قرمز می‌گذارد و سعید فقط کلاه قهوه‌ای می‌گذارد.



یک روز صبح چوپان، کلاه بر سر با گوسفندان از روستا خارج شد. کلاه او چه رنگی بود؟!